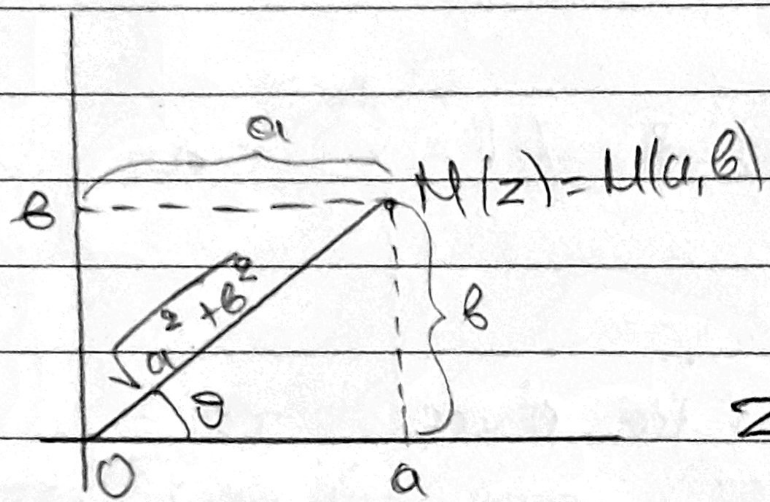
11/10/18

Τριγωνομετρική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού



όπου $z=a+bi$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\rho$

$z\neq 0+0i$

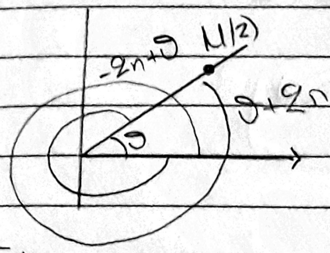
$|z|\neq 0\neq \rho$

$$z=a+bi=\rho\left(\frac{a}{\rho}+\frac{b}{\rho}i\right)$$

$$=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

Ορισμός: Ονομάζουμε όρισμα του μιγαδικού μη-μηδενικού αριθμού $z=a+bi$ οποιαδήποτε από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία $OM(z)$

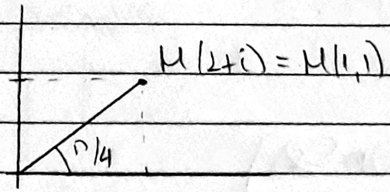
Παράδειγμα: $z = \alpha + \beta i$, $|z| = \rho \neq 0$



$\boxed{\theta + 2\kappa\pi}$ Υπάρχουν άπειρες τέτοιες γωνίες : $\theta + 2\kappa\pi$

[!] Ονομάζουμε πρωτεύον όρισμα το όρισμα θ για το οποίο ισχύει $\theta \geq 0$ και $\theta < 2\pi$

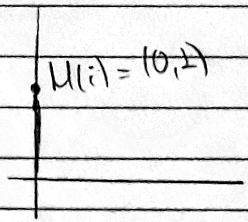
Παράδειγμα: $z = 1 + i$



$$
\begin{aligned}
1 + i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Παράδειγμα: $z = i$

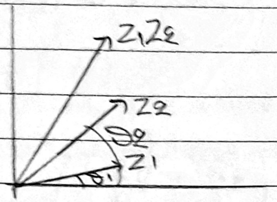


$$
\begin{aligned}
z = i &= 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

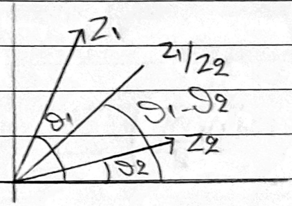
→ $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ $\quad z_1 \neq 0$

$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $\quad z_2 \neq 0$

$$z_1 \cdot z_2 = \underbrace{\rho_1 \cdot \rho_2}_{\text{πολ/ζω μέτρα}} \left(\underbrace{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)}_{\text{αθροίζω τα ορίσματα}}\right)$$

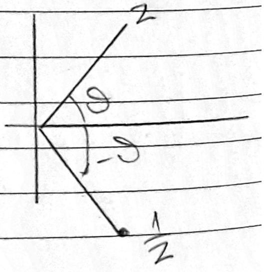


$$\frac{z_1}{z_2} = \underbrace{\frac{\rho_1}{\rho_2}}_{\text{↳ διαιρώ μέτρα}} \left(\underbrace{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)}_{\text{↳ αφαιρώ τα ορίσματα}}\right)$$



$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$$



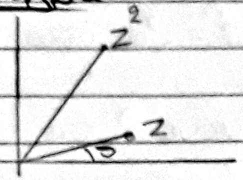
Ο $\frac{1}{z}$ λέγεται αντίστροφος του z.

Θεώρημα De Moivre

Αν $z \neq 0$ και $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε:

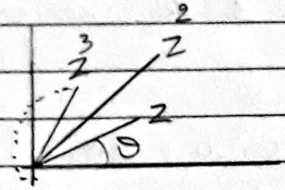
$$\boxed{z^n = \rho^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Παράδειγμα:



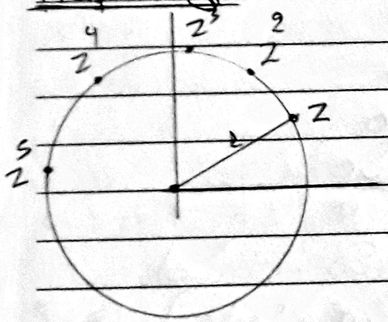
$|z| = 2$

Παράδειγμα: $|z| < 1$



όσο πάει πλησιάζει το μηδέν αλλά δε γίνεται ποτέ μηδέν

Παράδειγμα: $|z| = 1$



$|z|^2 = 1$ παραμένει πάντα πάνω στον κύκλο με ακτίνα 1.

→ Πως λύνω εξισώσεις όπως οι:

$z^2 = 4$

$z = 2$ ή $z = -2$

$z^7 = 4$

$z^3 = -4$

$z^{2018} = 3 - 7i$

Παρατήρηση! $a_1+b_1 i = a_2+b_2 i$
$\iff a_1=a_2$ και $b_1=b_2$

$\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$
$\iff \rho_1=\rho_2$ και $\theta_1-\theta_2=2k\pi$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$

Άσκηση: Να λυθεί η εξίσωση $z^n=z_0$, όπου $z_0\in\mathbb{C}$

1η περίπτωση: $z_0=0 \Rightarrow z=0$ μία μόνο λύση

2η περίπτωση: $z_0\neq 0 \Rightarrow z_0=\rho_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$
Παρατηρώ ότι οποιαδήποτε λύση της $z^n=z_0$ είναι μη-μηδενική. Άρα $z\neq 0$
$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$
$z^n=z_0 \Rightarrow \left(\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=\rho_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$

De Moivre: $\rho^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))=\rho_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$

$\rho_0=\rho^n$ και $n\varphi-\theta_0=2k\pi$
$\rho=\sqrt[n]{\rho_0}=$ $\quad n\varphi=2k\pi+\theta_0$
$=\rho_0^{1/n}$ $\quad \varphi=\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta_0}{n}$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης $z^n=\rho_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$
είναι: $z=\rho_0^{1/n}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta_0}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta_0}{n}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

$k=0: z_0=\rho_0^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta_0}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta_0}{n}\right)\right)$

$k=1: z_1=\rho_0^{1/n}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{\theta_0}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{\theta_0}{n}\right)\right)$

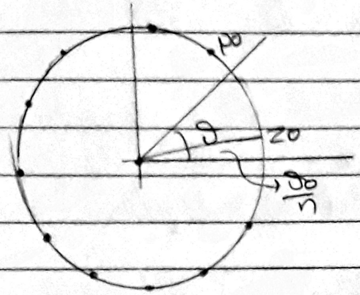
$k=2: z_2=\rho_0^{1/n}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{n}+\frac{\theta_0}{n}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{n}+\frac{\theta_0}{n}\right)\right)$

⋮

$k=n: \; z_n = \rho_0^{1/n}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{n}+\frac{\theta_0}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi}{n}+\frac{\theta_0}{n}\right)\right) = z_0$

n-λύσεις

$z^n = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$



ακτίνα $\rho_0^{1/n}$ και απλώς αλλάζω τη γωνία

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = 1$

$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

Άρα $z \neq 0 \Rightarrow z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$\rho^3 = 1$ και $3\varphi - 0 = 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2k\pi}{3}$

$\rho = 1$

$k=0: \; z_0 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$

$k=1: \; z_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$k=2: \; z_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$